Tel. 388/9837745

Controlli Automatici PARTE I

Sistema dinamico

↓

obiettivo: CONTROLLO DEI sistemi fisici

VARIABILI DI INGRESSO $\underline{u}(t)$ → [sistema dinamico] → VARIABILI DI USCITA $\underline{y}(t)$

Info necessarie al tempo t_0 per predire l'uscita futura, noto l'ingresso $u(t)$, $\forall t > t_0$

Stato di un sistema dinamico ↔ vettore di stato $\underline{x}(t)$

eq. di stato → $\dot{\underline{x}} = G(\underline{x}, \underline{x}_0, \underline{u}(t), t, t_0)$

eq. di uscita → $\underline{y} = H(\underline{x}, t, \underline{u}(t))$

Sistema Stazionario (o tempo-invariante)

$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), u(t))$

L'evoluzione del sistema non dipende dal tempo e dall'ist. iniziale, a parità di ingresso e condizioni iniziali.

Sistema Lineare → Principio di Sovrapposizione degli effetti

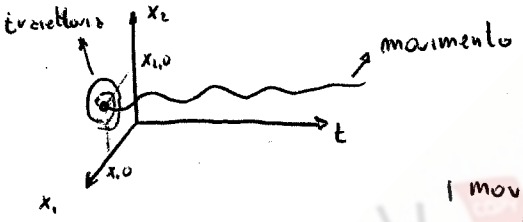
$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$
$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

} Forma standard delle eq. per sistemi LTI

se $D = 0$ → sistema strettamente proprio

se $D \neq 0$ → sistema proprio

Movimento e traiettoria



movimento → curva costituita dall'insieme di punti $(\underline{x}(t), t)$

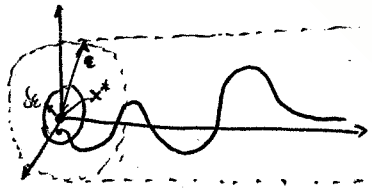
traiettoria → proiezione del movimento sullo spazio degli stati

I movimenti possibili di un sistema sono infiniti, dato che le condizioni iniziali possibili sono infinite.

stato di equilibrio del sistema → x^* t.c. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) = \phi$ con u^* = costante $\forall t > t_0$

Stabilità alla Lyapunov (interna del sistema) → dato un sistema autonomo $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ con $\underline{x}^*$ punto di equilibrio:

$\underline{x}^*$ è stabile se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|\underline{x}_0 - \underline{x}^*\| < \delta_\varepsilon$ allora $\|\underline{x}(t) - x^*\| < \varepsilon \ \forall t$



devo trovare un intorno di x^* di raggio δ_ε in cui stanno le condizioni iniziali del sistema, ed il movimento del sistema sta interno al cilindro di raggio ε

Stabilità asintotica → se $\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0$ → x^* è asintoticamente stabile

per convenzione $t_0 = 0$

gli stati di equilibrio li studio con ingresso nullo ($\underline{u}(t) \equiv \underline{0}$)

$\underline{x} = \underline{0}$ è sempre un punto di equilibrio

IMPO: se $\underline{x} = \underline{0}$ è punto di eq. stabile (o asintotic) allora qualsiasi altro punto di eq. del sistema è stabile (o asintotic) e viceversa

Linearizzazione ⟶ serve per trovare una rappresentazione lineare di un sistema non lineare attorno al punto di equilibrio

SISTEMA NON LINEARE

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = \underline{h}(\underline{x}) \end{cases}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}^* \\ \underline{u}=\underline{u}^*}} (\underline{x}-\underline{x}^*) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}^* \\ \underline{u}=\underline{u}^*}} (\underline{u}-\underline{u}^*) \\ \underline{y} = \underline{h}(\underline{x}^*) + \left.\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} (\underline{x}-\underline{x}^*) \end{cases}$$

$n \times n$, $n \times m$, $p \times n$

MATRICI JACOBIANE

è come una approssimazione con le serie di Taylor

Esponenziale di matrice

$$e^{At} \triangleq I + A \cdot t + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Proprietà:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$$

$$e^{-At} \cdot e^{At} = I_n$$

risposta libera → ingresso nullo

risposta forzata → cond. iniziali nulle

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At(t-t_0)}}_{\text{RISP. LIBERA}} \underbrace{\underline{x}_0}_{\underline{x}(t_0)} + \underbrace{e^{At} \int_{0(t_0)}^{t} e^{-A\tau} \cdot B\underline{u}(\tau)\, d\tau}_{\text{RISP FORZATA}}$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

$$\dot{\underline{x}}(t) = Ae^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B\underline{u}(\tau)\, d\tau + B\underline{u}(t)$$

con $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ & & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$ A diagonale

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 t + \frac{(\lambda_1 t)^2}{2} + \dots & 0 & & \\ 0 & 1+\lambda_2 t + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2} + \dots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n t + \frac{(\lambda_n t)^2}{2} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Se A è diagonale il mio sistema è fatto così

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{x} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

⟶ è un sistema disaccoppiato
cioè ogni $\dot{x}_i$ dipende solo da x_i $\forall i \in N$

A può essere diagonalizzabile se $A = T^{-1} \lambda T$ con T invertibile e λ DIAGONALE

$\downarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ λ_i autovalori della matrice A

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Se $\exists \underline{v} : A\underline{v} = \lambda_i \underline{v} \Longleftrightarrow (A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0} \Longrightarrow$ $\underline{v}$ = autovettore, λ_i = autovalore

gli autovalori sono le radici di $p(\lambda) = 0$ con $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Se A diagonalizzabile, allora $e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T$

Cambio di coordinate

$x = T^{-1}\tilde{x}$ $\quad \dot{x} = T^{-1}\dot{\tilde{x}}$

definisco $\tilde{x} = Tx \rightarrow \dot{\tilde{x}} = T\dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (TAT^{-1})\tilde{x} + TBu = \Lambda\tilde{x} + TBu \\ y = (CT^{-1})\tilde{x} \end{cases}$$

ottengo un sistema analogo al precedente ma diversificato dal fatto che ho un cambio di coordinate nello spazio dello stato. Spesso può essere utile per semplificare lo studio del sistema

Molteplicità geometrica $\rightarrow \dim(\ker(\lambda_i I - A))$

se $\dim(\ker(\lambda_i I - A)) = \mu_i \quad \forall \lambda_i \longrightarrow A$ è diagonalizzabile

μ_i ↓ molteplicità algebrica.

ricordarsi che se $M \in \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \dim(\ker(M)) = m - rk(M)$

Matrice di Jordan — Se A non è diagonalizzabile, è cmq sempre simile a una matrice J (FORMA DI JORDAN DI A) diagonale a blocchi, in cui ogni sottoblocco ha forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ 0 & & & J_4 \end{bmatrix}$$

caso particolare → La matrice diagonale è in forma di Jordan con sottoblocchi di dim = 1

esempi

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$$

un blocco di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)^2$$

3 blocchi di jordan

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & & \\ & & & & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \begin{cases} T^{-1} e^{\Lambda t} T & \text{se A diagonalizzabile} \\ T^{-1} e^{Jt} T & \text{se A Jordanizzabile} \end{cases}$$

Se $\lambda_i \in \mathbb{C}$ le funzioni sono esponenziali complessi (CISOIDI)

$A e^{\alpha t}(\cos(\beta t + \varphi)$ $A t e^{\alpha t}(\cos(\beta t + \varphi)) \ldots$

con $\lambda_i = \alpha + j\beta$ — con A e φ che dipendono dalle condizioni iniziali

gli elementi di e^{At} sono combinazioni lineari delle funzione che costituiscono gli elementi di $e^{\Lambda t}$ e e^{Jt}

Stabilità → condizione sugli autovalori

Se gli autovalori sono <u>tutti</u> a $Re < 0$ il sistema è asintoticamente stabile

Se gli autovalori sono non tutti a $Re < 0$ il sistema è instabile

Se $Re(\lambda) = 0$, il sistema è stabile solo se A è diagonalizzabile (esono solo termini costanti o cosinusoidi)

Quindi se gli autovalori di A sono a $Re \leq 0$ il sistema è stabile purché quelli a $Re = 0$ abbiano tutti
- o molteplicità algebrica $\mu = 1$
- o quelli con molteplicità algebrica > 1 soddisfano la condizione $\dim(\ker(\lambda I - A)) = \mu$

Sistemi LTI a tempo discreto

sono descritti da equazioni alle differenze

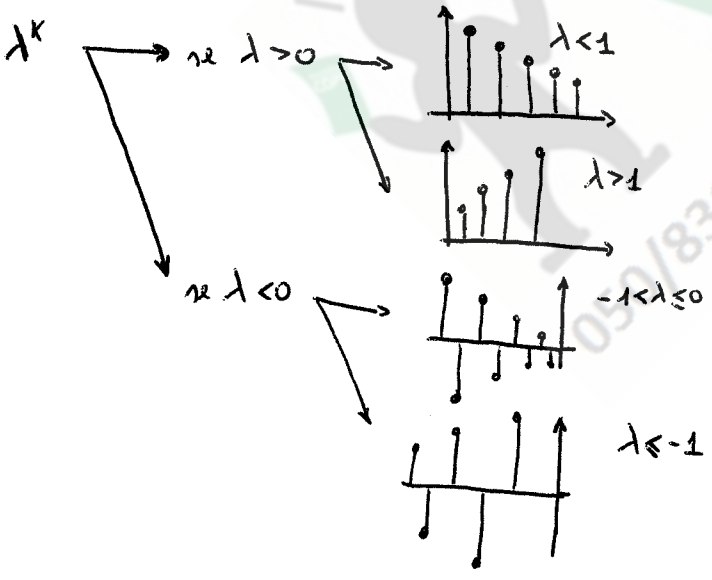
$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = C\underline{x}(k) \end{cases} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Formula risolutiva di un eq. alle differenze

$$\underline{x}(k) = \underbrace{A^{k(-k_0)}\underline{x}_0}_{\text{RISP. LIBERA}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{(k-1)-j} A^{k-1} \cdot B\underline{u}(j)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

La teoria matriciale è simile al tempo continuo

nel continuo avevo funzioni del tipo $\begin{cases} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t}\cos(\beta t) \\ t_2^{\lambda t}\cos(\beta\theta);\ t_2^2 e^{\lambda t}\cos(\beta\theta) \\ t_2^{\lambda t},\ t^2 e^{\lambda t} \ldots \end{cases}$; nel discreto avrò $\begin{cases} |\lambda|^k \\ |\lambda|^k \cos(\gamma k) \\ k|\lambda|^k;\ k^2|\lambda|^k \\ k|\lambda|^k\cos(\gamma k) \end{cases}$



stabilità → condizione sugli autovalori

nei sistemi a tempo discreto è importante il modulo di λ

- Se <u>tutti</u> gli autovalori di A sono t.c. $|\lambda_i| < 1$, il sistema è asintoticamente stabile
- o Se esiste anche un solo autovalore λ_j con $|\lambda_j| > 1$, il sistema è instabile
- Se gli autovalori di A sono t.c $|\lambda_i| \leq 1$ il sistema è stabile se
  - o gli autovalori con $|\lambda_h| = 1$ hanno tutti molteplicità algebrica 1
  - o gli autovalori con $|\lambda_h| = 1$ hanno tutti molteplicità geometrica = a quelle algebrica

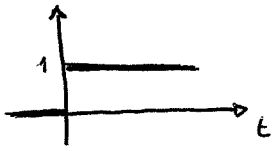
ovvero A diagonalizzabile

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

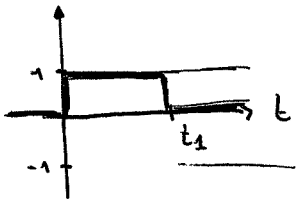
Segnali di Riferimento

- Funzione Gradino



$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,1(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)\,d\tau \quad \text{per } t>0$$

- Funzione Rettangolo

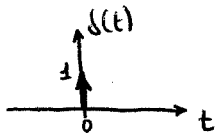


è la somma di due gradini

$$rect(t) = 1(t) - 1(t-t_1) \quad \text{per } t, t_1 > 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,rect(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t_1} f(\tau)\,d\tau$$

- Funzione impulso (delta di Dirac)



$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = f(0)$$

- rampa
- parabola

$$\int \Bigg| \begin{matrix} \delta(t) \\ 1(t) \\ t \\ t^2/2 \end{matrix} \Bigg| \frac{d}{dt}$$

Trasformata di Laplace

Data una una funzione complessa f della variabile reale t ; sia poi $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.

Se $F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$ esiste almeno per qualche valore di s, essa si dice TRASFORMATA DI LAPLACE DI $f(t)$.

Si ha una corrispondenza 1 a 1 tra il dominio del tempo e il dominio delle frequenze.



nel dominio di Laplace le eq. di FFerenziali diventano semplici equazioni algebriche

nostre ipotesi → $f(\tau)$ o è una distribuzione o è una funzione classica

$f(t) = 0$ per $t<0$

Ascissa di convergenza σ^*

$$\sigma^* = \min_{\sigma} \{\sigma : \exists\, F(\sigma + j\omega)\}$$

Si dimostra che la trasformata esiste nel semipiano $Re > \sigma^*$, cioè per $Re > \sigma^*$ l'integrale converge e per $Re < \sigma^*$ l'integrale non converge

master COPY COPISTERIA 050/3312126 388/9837745